

Ad-soyad :

Numara :

CEVAP ANAHTARI

Lineer Cebir II Ara Sınav Soruları

05.04.2025

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız (Her şık 4 p).

(D) İki izomorfimin bileşkesi de izomorfizmdir.

(Y) $L: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ vektör kümesi V nin bir bazı ise $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \dots, L(\alpha_n)\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(D) Her matris bir lineer dönüşüm belirtir.

(D) Bir iç çarpım uzayında lineer bağımsız her küme ortonormal hale getirilebilir.

(Y) Birebir olan her lineer dönüşüm örtendir.

2) $\mathbb{R}^4$ te $u = (2, -2, 0, -1)$ ve $v = (1, -1, -1, 1)$ vektörleri veriliyor.

a) u vektörünün v vektörü üzerine izdüşümünü bulunuz (7 p).

b) u vektörünün v vektörü üzerine izdüşüm uzunluğunu bulunuz (7 p).

c) u vektörü ile v vektörü arasındaki açıyı bulunuz (6 p).

3) $L: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+c, b+c+d, a+d)$ lineer dönüşümü için aşağıdakileri bulunuz (Her şık 4 p).

a) çekL b) $L(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ c) boy(çekL) d) rankL

4) $\mathbb{R}^2$ nin $S = \{(2,1), (3,2)\}$ ve $T = \{(1,1), (2,1)\}$ bazları veriliyor.

a) S den T ye geçiş matrisi P yi bulunuz (10 p).

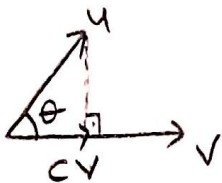
b) $[v]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise P yi kullanarak $[v]_T$ yi bulunuz (10 p).

5) V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\forall u, v \in V$ için $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ olduğunu gösteriniz (20 p).

6) $L: U \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm ve $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset U$ olsun.

$T = \{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_n)\} \subset V$ lineer bağımsız ise S nin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz (10 p).

2) a)



$$cv = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{\langle (2, -2, 0, -1), (1, -1, -1, 1) \rangle}{\langle (1, -1, -1, 1), (1, -1, -1, 1) \rangle} v$$

$$= \frac{3}{4} (1, -1, -1, 1)$$

b) $\|cv\| = |c| \|v\| = \frac{3}{4} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{3}{2}$

c) $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

3) a) $\text{Ker } L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Ker } L \Leftrightarrow L(u) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a+b+c, b+c+d, a+d) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c+d=0 \\ a+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -R_3+R_2 \\ -R_3+R_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a=0, b=-c, d=0$$

$$\text{Ker } L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) $L(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \left\{ L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \right\}$

$$= \{(a+b+c, b+c+d, a+d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\forall u \in L(\mathbb{R}^{2 \times 2}) \text{ i\u00e7in } u = (a+b+c, b+c+d, a+d)$$

$$= a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 0) + d(0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow L(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \text{sp} \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

c) $\text{boy}(\text{Ker } L) = 1$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, L(\mathbb{R}^{2 \times 2}) \text{ i\u00e7in ba\u015f}$

$$\Rightarrow \text{rank } L = \text{boy } L(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 3$$

$$4) a) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad\quad}_T \quad \underbrace{\quad\quad}_S$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow S \text{ dan } T \text{ ye geçiş matrisi: } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir}$$

$$b) [v]_T = P[v]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5) \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle$$

$$\text{Bilineerlik} \left\{ \begin{aligned} &= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle + \langle u, u-v \rangle - \langle v, u-v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \cancel{\langle u, v \rangle} + \cancel{\langle v, u \rangle} + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle - \cancel{\langle u, v \rangle} \\ &\quad - \cancel{\langle v, u \rangle} + \langle v, v \rangle \\ &= 2(\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle) = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \end{aligned} \right.$$

6) $T = \{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_n)\}$ lineer bağımsız olsun. $i=1, 2, \dots, n$ için $c_i \in F$ olmak üzere $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0_u$ olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow L(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n) = L(0_u)$$

$$\Rightarrow L \text{ lineer olduğundan } L(0_u) = 0_v \text{ olup}$$

$$c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2) + \dots + c_n L(u_n) = 0_v \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow T \text{ lineer bağımsız olduğundan } i=1, 2, \dots, n \text{ için } c_i = 0 \text{ olup}$$

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ lineer bağımsızdır.}$$